STATISTIK (MAM 4137)

SEBARAN PENARIKAN CONTOH

Ledhyane Ika Harlyan

Outline

- Sebaran Penarikan Contoh
- Sebaran Penarikan Contoh Bagi Nilai Tengah
- Sebaran t
- Sebaran Penarikan contoh bagi beda dua mean

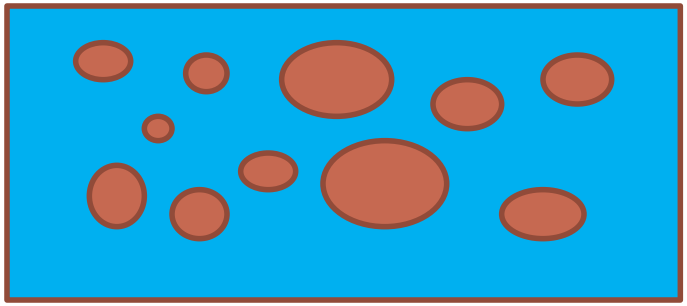
Parameter dan Statistik

- Untuk mengolah data sangat bergantung pada apakah data merupakan populasi atau suatu contoh yang diambil dari suatu populasi
- Nilai yang menjelaskan ciri dari populasi disebut parameter
- Nilai yang menjelaskan ciri dari suatu contoh disebut statistik. Pengambilan contoh harus dilakukan dengan hati-hati untuk meminimalisir terjadinya bias → perbedaan antara hasil dengan kondisi sesungguhnya

POPULASI DAN CONTOH

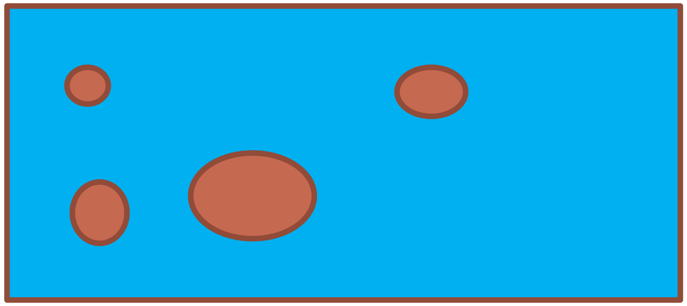
- POPULASI

  Keseluruhan objek penelitian yang dapat berupa manusia, hewan, tumbuh-tumbuhan, gejala, nilai, peristiwa, sikap hidup, dan sebagainya yang menjadi pusat perhatian dan menjadi sumber data penelitian



- SAMPEL

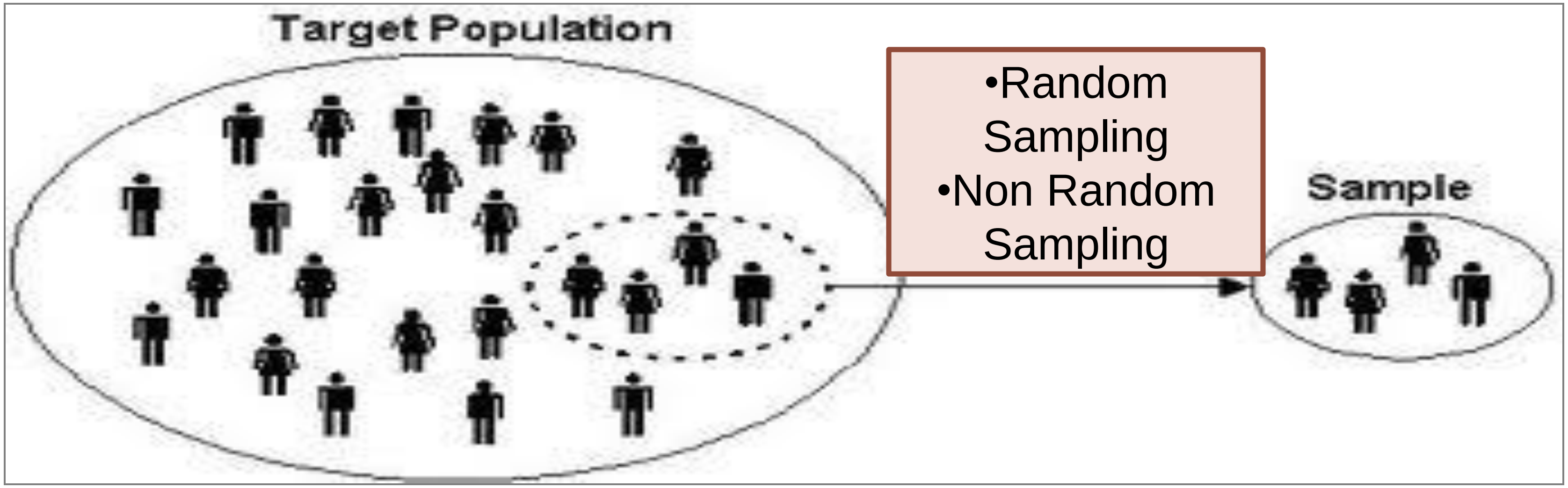
  bagian dari populasi yang dipilih dengan menggunakan aturan-aturan tertentu, yang digunakan untuk mengumpulkan informasi/data yang menggambarkan sifat atau ciri populasi.



Contoh= Statistik	Populasi = Parameter
a. Mean = $\bar{X}$ b. Deviasi Standar = s c. Proporsi = x/n d. Jumlah data = n	a. Mean = μ b. Deviasi Standard = σ c. Proporsi = P d. Jumlah data = N

Sebaran Penarikan Contoh

- Sebaran peluang suatu statistik disebut sebaran penarikan contoh
- Sebaran penarikan contoh suatu statistik akan bergantung pada ukuran populasi, ukuran contoh, dan metode pengambilan contohnya.



Sebaran Penarikan Contoh Bagi Nilai Tengah

- Misalnya sebuah populasi seragam diskret terdiri atas nilai 0, 1, 2, dan 3
- Nilai tersebut menyusun populasi nilai-nilai sebuah peubah acak X yang memiliki sebaran peluang :

f(x) =1/4, untuk x = 0,1,2,3

dengan nilai tengah :

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x f(x)$$
$$= \frac{0+1+2+3}{4} = \frac{3}{2}$$

ragam :

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{x=0}^{3} (x-\mu)^2 f(x)$$
$$= \frac{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2}{4} = \frac{5}{4}$$

Dari nilai 0,1,2,3 kita ambil 2 nilai secara acak dengan cara pemulihan (sampel yang sudah dipilih, berpeluang dipilih lagi) dan dihitung rata-ratanya.

No.	Sampel	Rata-rata
1	0;0	0
2	0;1	0,5
3	0;2	1
4	0;3	1,5
5	1;0	0,5
6	1;1	1
7	1;2	1,5
8	1;3	2

No.	Sampel	Rata-rata
9	2;0	1
10	2;1	1,5
11	2;2	2
12	2;3	2,5
13	3;0	1,5
14	3;1	2
15	3;2	2,5
16	3;3	3

$\bar{x}$	f	distribusi
0	1	1/16
0,5	2	2/16
1	3	3/16
1,5	4	4/16
2	3	3/16
2,5	2	2/16
3	1	1/16
	16	

- Sebaran penarikan contoh bagi $\bar{X}$ dengan pemulihan maka nilai $\bar{x}$ berfluktuasi dari 0 sampai 3, dengan :

  nilai tengah ($\mu_{\bar{x}}$) = $\Sigma \bar{x} f(\bar{x})$ = 3/2 = μ

  ragam ($\sigma_{\bar{x}}$) = $\Sigma (\bar{x} - 3/2)^2 f(\bar{x})$ = 5/8

- Nilai tengah peubah $\bar{X}$ selalu sama dengan nilai tengah populasi contohnya
- Nilai tengah peubah acak $\bar{X}$ sama sekali tidak bergantung pada ukuran contohnya
- Ragam bagi $\bar{X}$ bergantung pada ukuran contoh dan nilainya sama dengan ragam populasi asalnya σ^2 dibagi n
- Semakin besar ukuran contoh, semakin kecil galat bakunya dan kemungkinannya $\bar{x}$ akan mendekati μ

Bila semua kemungkinan **contoh acak berukuran n** diambil **DENGAN PEMULIHAN** (Sampel yang sudah diambil, berpeluang diambil lagi) dari **suatu populasi terhingga berukuran N** yang mempunyai **nilai tengah μ** dan **simpangan baku σ** maka untuk n yang cukup besar sebaran penarikan contoh bagi nilai tengah X akan menghampiri sebaran normal

DALIL 1

JIKA

Sampel:
berukuran = n ≥ 30
rata-rata = $\bar{x}$

} diambil DENGAN PEMULIHAN dari

{ Populasi berukuran = N terhingga
Rata-rata = μ
Simpangan baku = σ

MAKA

Distribusi Rata-rata akan mendekati distribusi Normal dengan :

$\mu_{\bar{x}} = \mu$ dan $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dan nilai $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

Contoh Soal

- Perusahaan perikanan dalam satu hari rata-rata mampu memproduksi 1.000.000 bungkus bakso ikan. Perusahaan ini menyatakan bahwa rata-rata berat sebungkus bakso ikan adalah 255 g dengan standart deviasi 10 g. Rata-rata populasi dianggap menyebar normal.
- Jika diambil sampel secara acak sebanyak 100 bungkus DENGAN PEMULIHAN, hitunglah peluang isi sebungkus bakso ikan kurang dari 258 g.

Jawab

N = 1.000.000 $\quad\quad\quad\quad$ σ = 10

$\mu_{\bar{x}} = \mu = 255$ $\quad\quad\quad\quad$ n = 100

$P(\bar{x} < 258) = P(z < ?)$

Simpangan baku $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10/10 = 1{,}0$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 258\text{-}255/1 = 3{,}0$$

$P(\bar{x} < 258) = P(z < 3{,}0)$ (lihat tabel z)

$= 0{,}9987 =$ **99,87%**

Bila semua kemungkinan **contoh acak berukuran n** diambil **TANPA PEMULIHAN** (Sampel yang sudah diambil, berpeluang diambil lagi) dari **suatu populasi terhingga berukuran N** yang mempunyai **nilai tengah μ** dan **simpangan baku σ** maka untuk n yang cukup besar sebaran penarikan contoh bagi nilai tengah X akan menghampiri sebaran normal

DALIL 2

JIKA

Sampel:
berukuran = n ≥ 30
rata-rata = $\bar{x}$

} diambil TANPA PEMULIHAN dari

{ Populasi berukuran = N terhingga
Rata-rata = μ
Simpangan baku = σ

MAKA

Distribusi Rata-rata akan mendekati distribusi Normal dengan :

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \qquad \text{dan} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \text{dan nilai} \quad z = \frac{\bar{x}-\mu}{(\sigma/\sqrt{n})\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

Faktor koreksi

Contoh Soal

- Diketahui rata-rata hasil tangkapan 500 nelayan adalah 165 kg dengan standart deviasi 12 kg. Kemudian diambil 40 nelayan secara acak sebagai sampel. Rata-rata populasi dianggap normal.
- Jika penarikan sampel dilakukan TANPA PEMULIHAN, hitunglah peluang hasil tangkapan nelayan lebih dari 167 kg.

Jawab

- N = 500 σ = 12
- $\mu_{\bar{x}}$ = μ = 165 n = 40
- P($\bar{x}$ > 167) = P(z > ?)
- Simpangan baku

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{12}{\sqrt{40}}\sqrt{\frac{500-40}{500-1}} = 1{,}75$$

$$z = \frac{167-165}{1{,}75} = \frac{2}{1{,}75} = 1{,}14$$

- P($\bar{x}$ > 167) = 1– P(z > 1,14) (lihat tabel z)

  = 1– 0,8729 = 0,1271 = **1,27%**

Bila **contoh acak berukuran n** ditarik dari **suatu populasi yang besar atau takterhingga** dengan **nilai tengah μ** dan **ragam σ^2** maka nilai tengah contoh $\bar{X}$ akan menghampiri sebaran normal

Dalil 3 (DALIL LIMIT PUSAT)

JIKA

Sampel:
berukuran = n
rata-rata = $\bar{x}$

} diambil dari

{ Populasi berukuran = N yang BESAR atau tak hingga
Rata-rata = μ ; simpangan baku = σ

MAKA

Distribusi Rata-rata akan mendekati distribusi Normal dengan :

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \qquad \text{dan} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{dan nilai} \quad z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Contoh Soal

- Sebuah perusahaan lampu memproduksi bohlam. Bila umur bohlam itu menyebar normal dengan nilai tengah 800 jam dan simpangan baku 40 jam hitunglah peluang bahwa suatu contoh acak 16 bohlam akan mempunyai umur rata-rata kurang dari 775 jam.

Jawab

$\sigma = 40$

$\mu_x = \mu = 800$ $\quad$ $n = 16$

$P(\bar{x} < 775) = P(z < ?)$

Simpangan baku $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 40/4 = 10$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 775\text{-}800/10 = -2{,}5$$

$P(\bar{x} < 775) = P(z < -2{,}5)$ (lihat tabel z)

$= 0{,}0062$

Kerjakan

- Tinggi 1000 mahasiswa menghampiri sebaran normal dengan nilai tengah 175 cm dan simpangan baku 7 cm. Bila 100 contoh acak diambil sebagai sampel, hitunglah :
  - Peluang tinggi badan lebih dari 177 cm dengan penarikan sampel TANPA PEMULIHAN
  - Peluang tinggi badan kurang dari 160 cm dengan penarikan sampel DENGAN PEMULIHAN

Sebaran t

- Bila ukuran contohnya kecil ($n < 30$), nilai-nilai s^2 berfluktuasi cukup besar dari contoh satu ke contoh lainnya, dan sebaran nilai-nilai ($- \mu$)/($s/\sqrt{n}$) tidak lagi normal baku. Bila demikian halnya, kita dihadapkan dengan sebaran suatu statistik yang disebut *T* , yang nilai-nilainya adalah

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

- Distribusi-t pada prinsipnya adalah pendekatan distribusi sampel kecil dengan distribusi normal.

- Bila $\bar{x}$ dan s^2 masing-masing adalah nilai tengah ragam suatu contoh acak berukuran n yang diambil dari suatu populasi normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2, maka :

$$\boxed{t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}}$$

merupakan sebuah nilai peubah acak T yang mempunyai sebaran t dengan derajat bebas (db) atau *degree of freedom (df)* = v = n-1

- Dua hal yang perlu diperhatikan dalam Tabel t adalah

  1. derajat bebas (db)

  2. nilai α
- Perbedaan Tabel z dan Tabel t

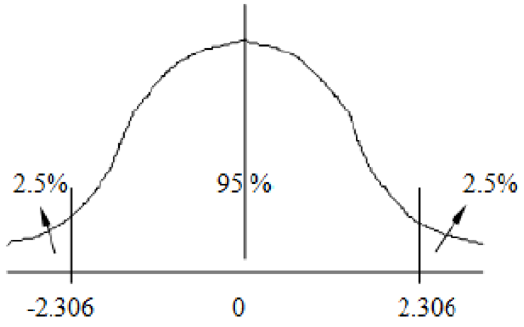
  Tabel z : nilai z menentukan nilai α

  Tabel t : nilai α dan db menentukan nilai t
- Nilai α adalah luas daerah kurva di kanan nilai t atau luas daerah kurva di kiri nilai –t
- Nilai α : 0.1 (10%) ; 0.05 (5%) ; 0.025(2.5%) ; 0.01 (1%) ; 0.005(0.5%)
- Nilai α terbatas karena banyak kombinasi db yang harus disusun

- PT Cigar menyatakan bahwa 95% rokok produksinya rata-rata mengandung nikotin 1.80 mg, data tersebar normal. Yayasan Konsumen melakukan pengujian nikotin terhadap 9 batang rokok dan didapatkan rata-rata kandungan nikotin = 1.95 mg dengan standar deviasi = 0.24 mg. Apakah hasil penelitian Yayasan Konsumen mendukung pernyataan yang dibuat perusahaan?

Jawab

- 95 % berada dalam selang $\rightarrow$ berarti 5 % berada di luar selang; 2.5 % di kiri t dan 2.5% di kanan t
- $\alpha = 2.5\ \% = 0.025$
- n = 9 $\rightarrow$ db = n - 1 = 8
- t tabel (db, α) = t tabel(8; 0.025) = 2.306
- Jadi 95 % berada dalam selang $-2.306 < t < 2.306$



Arti Gambar di samping adalah nilai t sampel berukuran n = 9, berpeluang 95% jatuh dalam selang
$-2,306 < t < 2,306$.
Peluang $t > 2,306 = 2.5\%$
dan
Peluang $t < -2.306 = 2.5\%$

- Nilai t

  μ = 1.80 n = 9

  $\bar{x}$ = 1.95 s = 0.24

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{1{,}95 - 1{,}8}{0{,}24 / \sqrt{9}} = \frac{0{,}15}{0{,}08} = 1{,}875$$

- Nilai t hitung = 1.875 berada dalam selang $-2.306 < t < 2.306$
- jadi hasil penelitian Yayasan Konsumen masih sesuai dengan pernyataan manajemen PT Cigar

Kerjakan

Sebuah produsen bohlam menyatakan bahwa bohlam produksinya mencapai umur rata-rata 500 jam. Untuk menjaga nilai rata-rata ini, ia menguji 25 bohlam setiap bulan. Bila nilai t yang diperolehnya jatuh antara $-t_{0.05}$ *dan* $t_{0.05}$ ia puas. Kesimpulan apa yang di tariknya bila ia memperoleh sampel dengan nilai tengah $\bar{x}$ = 518 jam dan simpangan baku s =40 jam? Asumsikan bahwa umur bohlam itu menyebar normal.

TERIMA KASIH