

Sebaran Normal

Ledhyane Ika Harlyan, S.Pi, M.Sc



**Jurusan Pemanfaatan Sumberdaya Perikanan dan Kelautan
Fakultas Perikanan dan Ilmu Kelautan – Universitas Brawijaya
2012**

Tujuan Instruksional Khusus

- Mengetahui sebaran normal dan aplikasinya

Materi Kuliah

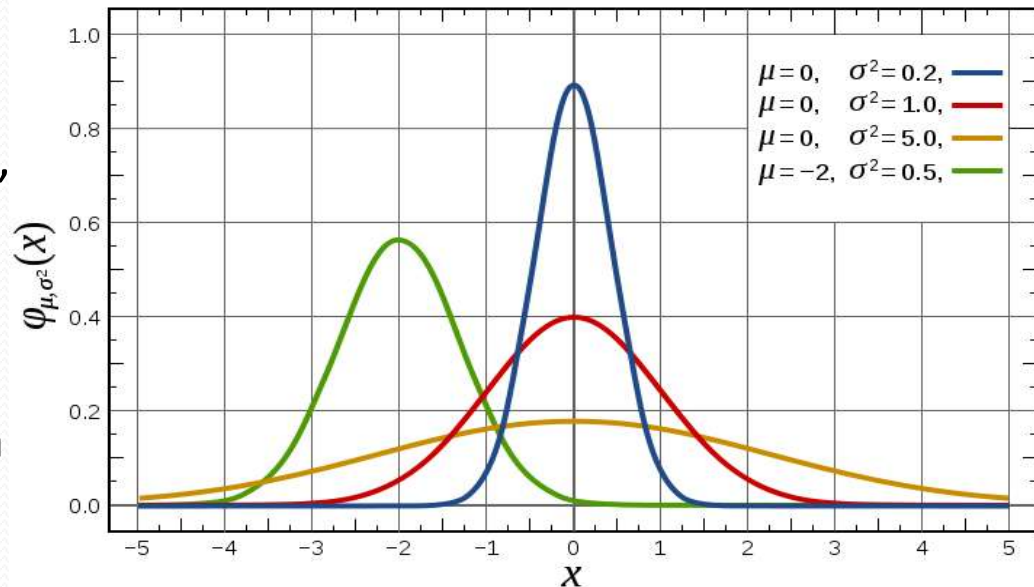
- kurva normal
- Luas daerah di bawah kurva normal
- penerapan sebaran normal

Kurva Normal

Sebaran Normal/ Gauss

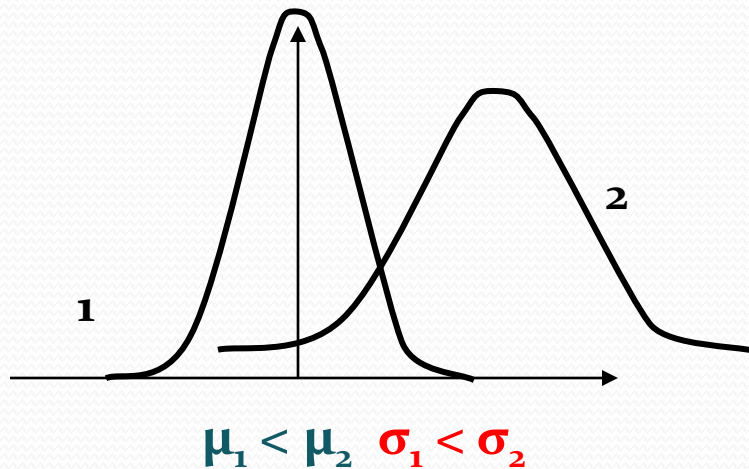
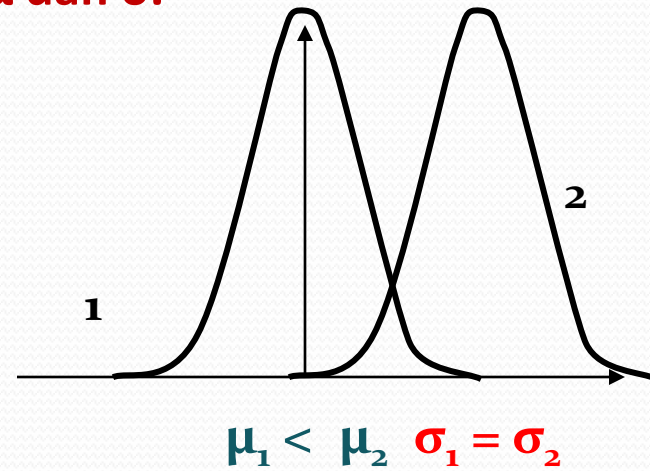
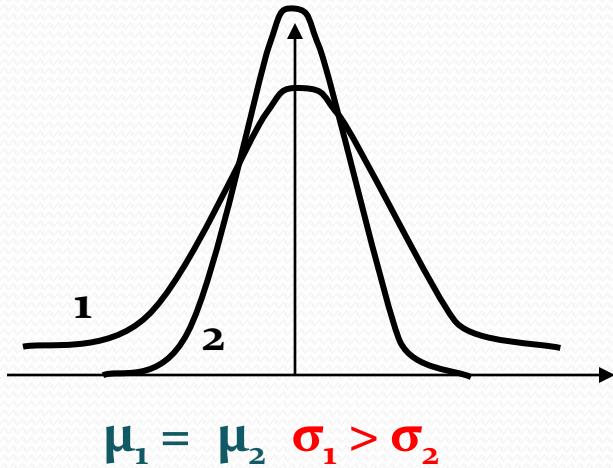
- Sebaran peluang kontinu yg digunakan di gugusan data alam, industri, dan penelitian
- Definisi:
Jika X merupakan suatu peubah acak normal dengan nilai tengah dan ragam σ^2 , maka persamaan kurva normalnya

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$



Kurva Normal

Bentuk distribusi normal **ditentukan oleh μ dan σ** .



Kurva Normal

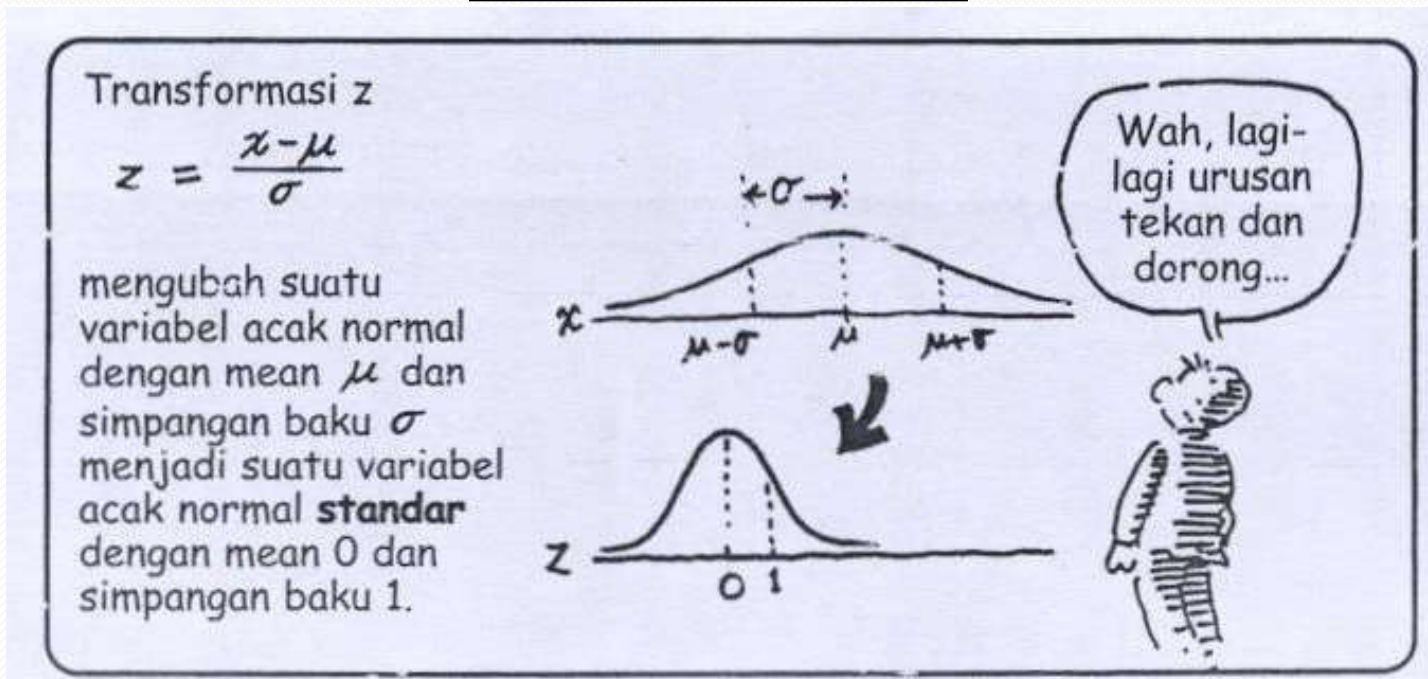
Sifat-sifat kurva normal:

1. **Modusnya** → titik pada sumbu mendatar yang membuat fungsi mencapai maksimum, terjadi pada $x = \mu$
2. **Kurvanya setangkup** terhadap suatu garis tegak yang melalui nilai tengah
3. Kurva ini mendekati sumbu mendatar secara asimtotik dalam kedua arah **bila kita semakin menjauhi nilai tengahnya.**
4. Luas daerah yang terletak di bawah kurva tetapi di atas sumbu mendatar = 1

Gambaran kurva normal

Transformasi dari peubah acak $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ ke peubah acak $Z \sim \text{Normal Baku}(0,1)$, dengan menggunakan :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



Gambaran kurva normal

Hasilnya sangat mirip dengan kurva berbentuk lonceng yang mulus dan simetrik. Semua itu diperikan oleh De Moivre dalam persamaan yang sederhana:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

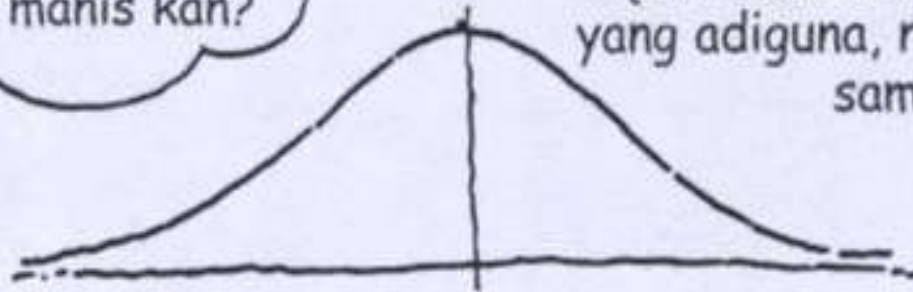
Fungsi ini dinamakan

**distribusi
normal standar**

(e adalah tetapan matematik yang adiguna, nilainya kira-kira sama dengan 2,718)



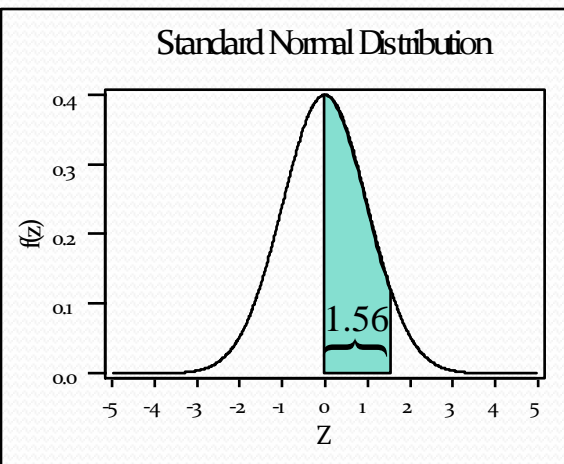
manis kan?



Menghitung Probabilitas dengan Kurva Normal: $P(0 < Z < 1.56)$

Standard Normal Probabilities

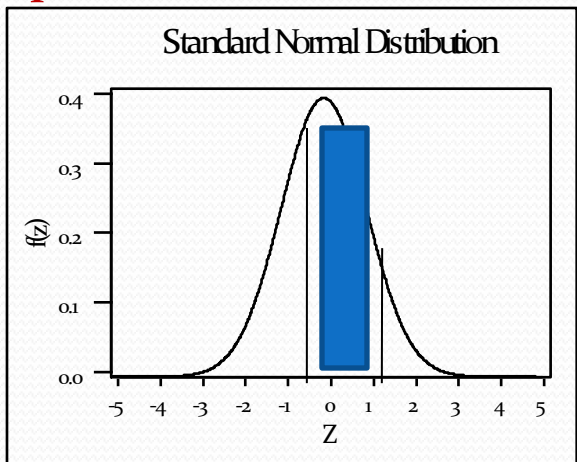
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990



Lihat baris 1.5 dan kolom .06 untuk mencari $P(0 \leq z \leq 1.56) = 0.4406$

Pola Distribusi Normal

Luas daerah untuk kurva normal adalah luas daerah di bawah kurva (sebelah kiri dari nilai peubah z)



CONTOH!!

Untuk sebaran normal dengan $\mu=50$; $\sigma=10$ hitunglah bahwa X mengambil sebuah nilai antara 45 dan 62!

$$Z_1 = (45 - 50) / 10 = -0.5$$

$$Z_2 = (62 - 50) / 10 = 1.2$$

$$\text{Maka } P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2)$$

$$\begin{aligned} P(45 < X < 62) &= P(-0.5 < Z < 1.2) \\ &= P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) \\ &= 0.8849 - 0.3085 \end{aligned}$$

Contoh: Hitung Luas

Pergunakanlah tabel distribusi normal standard untuk menghitung luas daerah :

- a) Di sebelah kanan $z=1.84$
- b) Antara $z=-1.97$ s/d $z=0.86$

Jawab.

Ingat bahwa luas yg diberikan dalam tabel distribusi normal kumulatif adalah luas dari $z=-\infty$ s/d z_0 tertentu: $P(z < z_0)$.

- a)
$$\begin{aligned} P(z > 1.84) &= 1 - P(z \leq 1.84) \\ &= 1 - 0.9671 \\ &= 0.0329 \end{aligned}$$
- a)
$$\begin{aligned} P(-1.97 < z < 0.86) &= P(z < 0.86) - P(z < -1.97) \\ &= 0.8051 - 0.0244 \\ &= 0.7807 \end{aligned}$$

Memakai Distribusi Normal Dalam Arah Kebalikan

Diketahui luas dibawah distribusi normal yg diinginkan yang terkait dengan besar probabilitas, ingin dicari nilai variabel random X yg terkait.

Contoh.

Misalkan distribusi normal memiliki $\mu=40$ $\sigma=6$, carilah nilai x_0 sehingga:

- a) $P(x < x_0) = 45\%$
- b) $P(x > x_0) = 14\%$

Jawab.

- a) Kita mulai dengan mencari nilai Z yg sama luasnya.

$$P(z < z_0) = 45\% = 0.45 \rightarrow \text{dari tabel } z_0 = -0.13$$

$$z_0 = (x_0 - \mu) / \sigma$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \mu + \sigma z_0 \\ &= 40 + 6 * (-0.13) \end{aligned}$$

$$= 39.22$$

Memakai Distribusi Normal Dalam Arah Kebalikan

Jawab.

b) Kita mulai dengan mencari nilai Z yg sama luasnya.

$$\begin{aligned}P(z > z_0) = 14\% &\rightarrow P(z < z_0) = 1 - P(z > z_0) \\ &= 1 - 0.14 \\ &= 0.86\end{aligned}$$

$$P(z < z_0) = 0.86 \rightarrow \text{dari tabel } z_0 = 1.08$$

$$\begin{aligned}z_0 = (x_0 - \mu) / \sigma &\rightarrow x_0 = \mu + \sigma z_0 \\ &= 40 + 6 * (1.08) \\ &= 46.48\end{aligned}$$

Contoh Penerapan Distribusi Normal

Sebuah perusahaan lampu celup bawah air mengetahui bahwa umur lampunya (sebelum putus) terdistribusi secara normal dengan rata-rata umurnya 800 jam dan standard deviasinya 40 jam. Carilah probabilitas bahwa sebuah bolam produksinya akan:

- Berumur antara 778 jam dan 834 jam
- Berumur kurang dari 750 jam atau lebih dari 900 jam

Jawab.

$$\mu = 800 \quad \sigma = 40.$$

$$\triangleright P(778 < x < 834)$$

$$x_1 = 778 \rightarrow z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma = (778 - 800) / 40 = -0.55$$

$$x_2 = 834 \rightarrow z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma = (834 - 800) / 40 = 0.85$$

$$\begin{aligned} P(778 < x < 834) &= P(-0.55 < z < 0.85) \\ &= P(z < 0.85) - P(z < -0.55) \\ &= 0.8023 - 0.2912 \\ &= 0.5111 \end{aligned}$$

Contoh Penerapan Distribusi Normal

b) Berumur kurang dari 750 jam atau lebih dari 900 jam

$$\mu = 800 \quad \sigma = 40.$$

$$P(x < 750 \text{ atau } x > 900)$$

$$\begin{aligned} x_1 = 750 &\rightarrow z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma \\ &= (750 - 800) / 40 \\ &= -1.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = 900 &\rightarrow z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma \\ &= (900 - 800) / 40 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x < 750 \text{ atau } x > 900) &= P(z < -1.25) + P(z > 2.5) \\ &= P(z < -1.25) + 1 - P(z < 2.5) \\ &= 1 + P(z < -1.25) - P(z < 2.5) \\ &= 1 + 0.1056 - 0.9938 \\ &= 0.1118 \end{aligned}$$

Assignment!

Rata-rata nilai kuliah statistik diketahui 65 dengan standard deviasi 15.

- a) Jikalau diinginkan 15% murid mendapat nilai A dan diketahui distribusi nilai normal, berapakah batas bawah nilai agar mendapat A?
- b) Selanjutnya diinginkan yg mendapat B adalah sebanyak 25%. Berapakah batas bawah B?