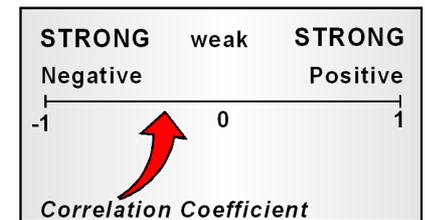
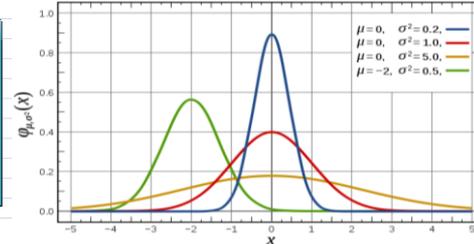
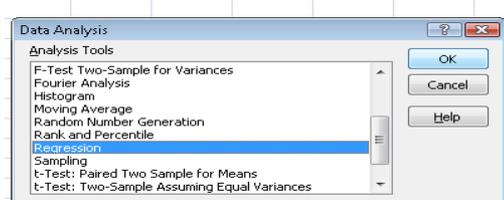
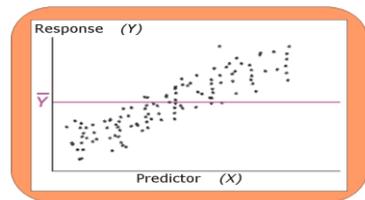


PENDUGAAN PARAMETER

Ledhyane Ika Harlyan

The Baseline Model



Jurusan Pemanfaatan Sumberdaya Perikanan dan Kelautan
Universitas Brawijaya
2013



Statistik Inferensia

- Mencakup semua metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulan atau generalisasi mengenai suatu populasi. → Menduga parameter atau karakteristik populasi berdasarkan data sampel.

- Dikelompokkan dalam dua bidang utama:
 1. Pendugaan Parameter
 2. Pengujian Hipotesis

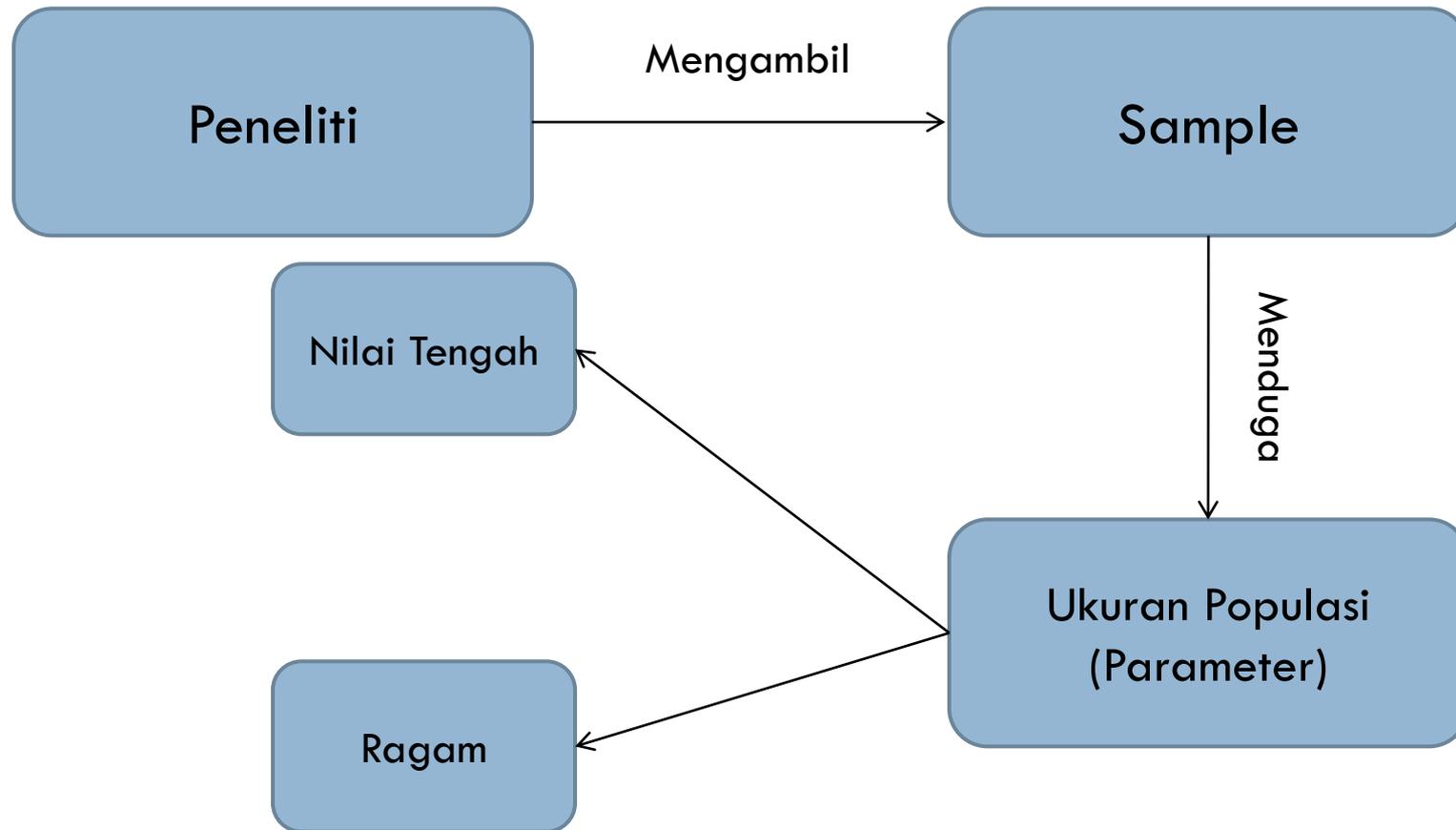
Pendugaan Parameter

- Melakukan estimasi terhadap nilai dugaan/taksiran suatu parameter tertentu, karena pada umumnya nilai parameter suatu distribusi tidak diketahui.
- Contoh :

Seorang calon dalam suatu pemilihan ingin menduga proporsi sebenarnya dari pemilih yang akan memilihnya, dengan cara mengambil 100 orang secara acak untuk ditanyai pendapatnya. Proporsi pemilih yang menyukai calon tersebut dapat digunakan sebagai dugaan bagi proporsi populasi yang sebenarnya.

Metode Pendugaan Parameter

- Digunakan untuk mengukur suatu populasi



Metode Pendugaan Parameter

□ Metode Pendugaan Klasik

Pendugaan dilakukan berdasarkan sepenuhnya pada informasi sampel yang diambil dari populasi

□ Metode Pendugaan Bayes

Pendugaan dengan menggabungkan informasi yang terkandung dalam sampel dengan informasi lain yang telah tersedia sebelumnya yaitu pengetahuan subyektif mengenai distribusi probabilitas parameter

Pendugaan Titik

- Penduga titik adalah suatu nilai angka tertentu sebagai estimasi untuk parameter yang tidak diketahui
- Misal:
menduga μ dengan \bar{x}

Pendugaan Selang

- Parameter ditaksir oleh harga diantara batas-batas dua harga
 - Misal:
 - jika rata-rata sampel panjang ikan adalah 60 cm, maka rata-rata populasi bisa antara 55 cm – 65 cm atau antara 50 cm – 70 cm.
 - semakin **besar** interval duga → semakin **kecil** selang kepercayaan
 - semakin **kecil** interval duga → semakin **besar** selang kepercayaan.
- “sedapat mungkin kita memperoleh interval duga yang kecil dengan selang kepercayaan yang besar.”*

- Untuk menduga interval μ harus didapatkan dua nilai statistik L dan N sedemikian sehingga

$$P(L \leq \mu \leq N) = 1 - \alpha$$

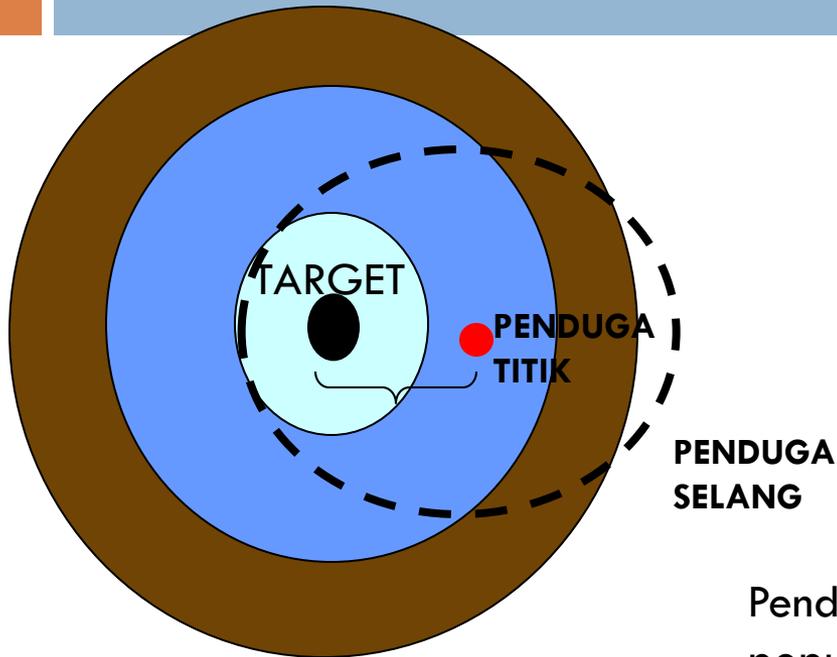
Interval hasilnya $L \leq \mu \leq N$ = dugaan interval *dengan* kepercayaan $(1 - \alpha)$ untuk μ (rata-rata populasi) yang tidak diketahui

L dan N = batas kepercayaan atas dan bawah,

$(1 - \alpha)$ = koefisien kepercayaan *atau* derajat kepercayaan.

$\alpha = 0.1$, diperoleh selang kepercayaan 90%

Ilustrasi Penduga Titik dan Selang



Penduga titik tidak selalu tepat menduga parameter populasi maka digunakan pendugaan dalam bentuk selang interval

Dalam setiap pendugaan mengandung **PELUANG** kesalahan

Penduga selang → konsep probability → **SELANG KEPERCAYAAN (CONFIDENCE INTERVAL)**

Pendugaan Selang utk Nilai Tengah

contoh besar

- Selang kepercayaan bagi μ ; σ diketahui. Bila \bar{x} adalah nilai tengah contoh acak berukuran n dari suatu populasi dengan ragam σ^2 diketahui. Maka selang kepercayaan $(1 - \alpha) 100\%$ bagi μ adalah

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- n berukuran besar (≥ 30)
- Jika σ^2 tidak diketahui, tetapi sampel berukuran besar ($n \geq 30$), σ^2 dapat diganti dengan s^2

Soal

- Rata-rata nilai IPK 36 mahasiswa tingkat akhir adalah 3,6 dengan simpangan baku populasinya sebesar 0,3. Hitunglah selang kepercayaan 95% dan 99% untuk rata-rata seluruh mahasiswa tersebut.

Jawab (95%)

- Nilai duga μ adalah $\bar{x} = 3,6$
- Nilai σ dapat diduga dengan $s = 0,3$ ($n \geq 30$)
- Selang kepercayaan 95% ($\alpha = 5\% = 0,05$)
- Nilai z sebelah kanan = 0,025 ($\alpha/2$) = -1,96
- Nilai z sebelah kiri = 0,975 = 1,96

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

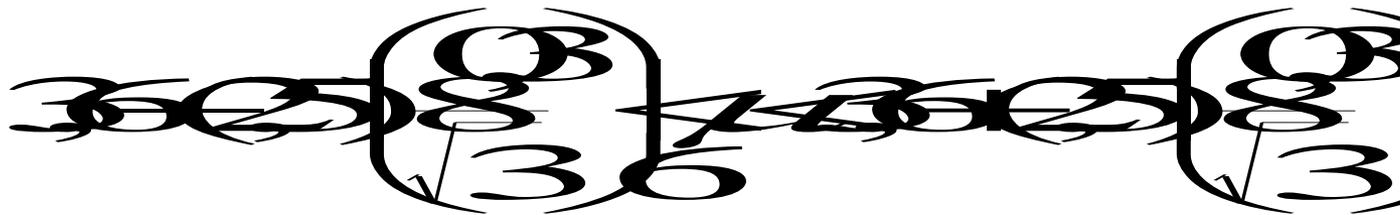
$$3,6 - (1,96) \left(\frac{0,3}{\sqrt{36}} \right) < \mu < 3,6 + (1,96) \left(\frac{0,3}{\sqrt{36}} \right)$$

$$3,5 < \mu < 3,7$$

Jawab (99%)

- Selang kepercayaan 99% ($\alpha = 1\% = 0,01$)
- Nilai z sebelah kanan = 0,005 ($\alpha/2$) = -2,57
- Nilai z sebelah kiri = 0,995 = 2,58

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



$$3,47 < \mu < 3,73$$

Pendugaan Selang utk nilai Tengah

contoh kecil

- Selang kepercayaan bagi μ ; σ tidak diketahui. Bila \bar{x} dan s adalah nilai tengah dan simpangan baku contoh berukuran $n < 30$ dan ragam σ^2 tidak diketahui, maka selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ bagi μ adalah

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- Dalam hal ini $t_{\alpha/2}$ adalah nilai t dengan $v = n-1$

Soal

- Terdapat tujuh botol berisi air mineral sebesar 9,8; 10,2; 10,4; 9,8; 10; 10,2 dan 9,6 liter. Tentukan selang kepercayaan 95% bagi nilai tengah isi semua botol. Asumsikan data menyebar normal.

Jawab

- Nilai $\bar{x} = 10$
- Nilai $s = 0,283$
- Selang kepercayaan 95% ($\alpha = 5\% = 0,05$)
- Nilai $t_{0,025} = 2,447$ untuk $v = 6$

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$10 - 2,447 \frac{0,283}{\sqrt{7}} < \mu < 10 + 2,447 \frac{0,283}{\sqrt{7}}$$

$$9,74 < \mu < 10,26$$

Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah

populasi independen, sampel besar

- Bila kita mempunyai dua populasi saling bebas dengan mean μ_1 dan μ_2 serta ragam σ_1^2 dan σ_2^2 maka penduga titik bagi selisih antara μ_1 dan μ_2 adalah $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Bila \bar{x}_1 dan \bar{x}_2 adalah nilai tengah sampel acak bebas berukuran n_1 dan n_2 yang diambil dari populasi dengan ragam σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui, maka selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ adalah

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- Jika σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui, tetapi n_1 dan n_2 lebih besar dari 30, maka σ_1^2 dan σ_2^2 dapat diganti dengan s_1^2 dan s_2^2

Soal

- Suatu ujian kimia diberikan kepada 50 siswa perempuan dan 75 siswa laki-laki. Siswa perempuan mendapat nilai rata-rata 76 dengan simpangan baku 6, sedangkan siswa laki-laki memperoleh rata-rata 82 dengan simpangan baku 8. Tentukan selang kepercayaan 96% bagi selisih rata-rata nilainya

Jawab

- Nilai $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 82 - 76 = 6$
- $s_1 = 8$; $s_2 = 6$
- Selang kepercayaan 96% ($\alpha = 4\% = 0,04$)
- $\alpha/2 = 0,02$ ($Z_{0,02} = 2,06$)



$$3,43 < \mu_1 - \mu_2 < 8,57$$

Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah

Populasi independen, sampel kecil, ragam sama

- Adapun penduga selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ untuk sampel kecil; bila $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tapi nilainya tidak diketahui adalah

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

- dengan derajat bebas untuk distribusi t = v = $n_1 + n_2 - 2$ dan ragam gabungannya adalah

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah

Populasi independen sampel kecil, ragam beda

- Selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ untuk sampel kecil; bila $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ dan nilainya tidak diketahui

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

- dengan derajat bebas untuk distribusi t adalah

$$v = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{[(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1)] + [(s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)]}$$

Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah

Berpasangan

- Bila kita mempunyai dua populasi yang tidak saling bebas (berpasangan), selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ untuk pengamatan berpasangan tersebut dengan $v = n-1$ adalah

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

$$s_d^2 = \frac{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n(n-1)}$$

Soal

- Dua puluh mahasiswa tingkat satu dibagi dalam 10 pasang, tiap pasang diperkirakan mempunyai IQ yang sama. Salah seorang dari tiap pasangan diambil secara acak dan dimasukkan ke kelas khusus, sedangkan anggota pasangan yang lainnya dimasukkan kedalam kelas biasa. Saat akhir semester, keduanya diberikan ujian yang sama dan hasilnya adalah sebagai berikut :

| Pasangan | Kelas khusus | Kelas biasa | d |
|----------|--------------|-------------|-----|
| 1 | 76 | 81 | -5 |
| 2 | 60 | 52 | 8 |
| 3 | 85 | 87 | -2 |
| 4 | 58 | 70 | -12 |
| 5 | 91 | 86 | 5 |
| 6 | 75 | 77 | -2 |
| 7 | 82 | 90 | -8 |
| 8 | 64 | 63 | 1 |
| 9 | 79 | 85 | -6 |
| 10 | 88 | 83 | 5 |

Tentukan selang kepercayaan 98% bagi selisih sesungguhnya dalam kedua kelas.

Jawab

- Pengamatan berpasangan, $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$ dan nilai μ_D diduga dengan rata-rata $d = -1,6$. sehingga ragam selisih-selisih tersebut adalah

$$s_d^2 = \frac{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n(n-1)} \quad s_d^2 = \frac{(10)(392) - (-16)^2}{(10)(9)} = 40,7$$

- $S_d = 6,38$
- Selang kepercayaan 98% ($\alpha = 2\% = 0,02$)
- $\alpha/2 = 0,01$ ($t_{0,01} = 2,821$ untuk $v = n-1 = 9$)

$$-1,6 - 2,821 \frac{6,38}{\sqrt{10}} < \mu_D < -1,6 + 2,821 \frac{6,38}{\sqrt{10}}$$
$$-7,29 < \mu_D < 4,09$$

- Selang ini memungkinkan μ_D sama dengan nol, sehingga tidak dapat disimpulkan bahwa kelas yang satu lebih baik daripada kelas lainnya.

Pendugaan Ragam

- Bila S^2 adalah ragam contoh acak berukuran n yang ditarik dari suatu populasi normal dengan ragam σ^2 , maka

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

- Disebut **Khi-kuadrat**, yang sebaran penarikan contohnya disebut sebaran khi-kuadrat dengan derajat bebas $\nu = n-1$.

Pendugaan Ragam

- Bila s^2 adalah penduga titik bagi varians sampel acak berukuran n yang diambil dari suatu populasi normal dengan varians σ^2 , maka selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi σ^2 adalah

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$$

- $\chi^2_{(\alpha/2)}$ dan $\chi^2_{(1-\alpha/2)}$ adalah nilai-nilai χ^2 dengan derajat bebas $v = n-1$

Soal

- Volume sepuluh botol berisi air mineral sebesar 46,4; 46,1; 45,8; 47; 46,1; 45,9; 45,8; 46,9; 45,2 dan 46 liter. Buat selang kepercayaan 95% bagi ragam volume botol. Asumsikan data menyebar normal.

Jawab

- Hitung S^2 , didapatkan $S^2 = 0,286$
- Selang kepercayaan 95% ($\alpha = 5\% = 0,05$)
- $\alpha/2 = 0,025$ ($X^2_{0,025; 10} = 19,023$)
- $1-\alpha/2 = 0,975$ ($X^2_{0,975; 10} = 2,700$)

Menggunakan
Tabel sebaran
khi-kuadrat

$$\frac{(9)(0,286)}{19,023} < \sigma^2 < \frac{(9)(0,286)}{2,700}$$

$$0,135 < \sigma^2 < 0,953$$

Thank you..

‘Statistics is the power to know the fraction secrets of God..’